



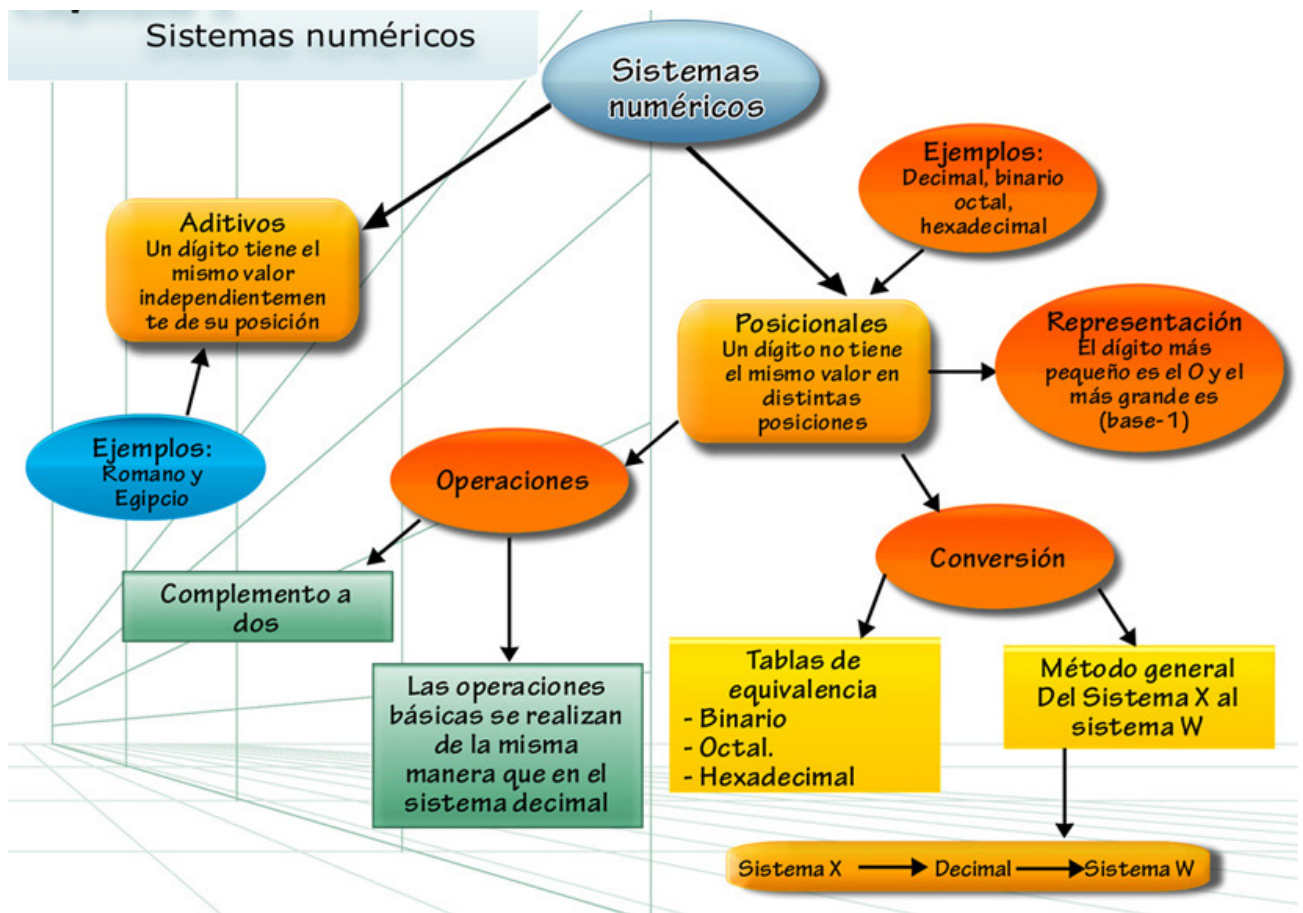
# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA REGIÓN CARBONÍFERA

## Formato de Prácticas

Materia:           Matematicas Discretas                   Especialidad: Ing. En Sistemas Computacionales

Unidad I.           Sistemas Numericos

Objetivo:           Sistematizar la conversión entre los diferentes sistemas numericos posicionales,  
asi como las operaciones basicas suma, resta, multiplicación y división en cada uno  
de ellos.



## 1 Sistemas Numéricos en Cualquier Base

En el sistema decimal, cualquier número puede representarse como una suma ponderada de potencias de 10, donde 10 es la base del sistema decimal. Ejemplo:

$$1492 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Evidentemente, los números con parte fraccionaria también pueden ser representados de esta forma. Por ejemplo:

$$1492.1012 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-4}$$

De esta misma forma, cualquier número en cualquier base  $b$ , con  $n$  dígitos en la parte entera y  $m$  dígitos en la parte decimal, puede escribirse

$$a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \cdots + a_1b^1 + a_0b^0 + a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + \cdots + a_{-m}b^{-m} \quad (1)$$

Por ejemplo supongamos el número binario (base 2) 1101,011

$$1101.011 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}. \quad (2)$$

Para encontrar el valor de este número binario (1101,011) en el sistema decimal basta con resolver la expresión de la derecha en la ecuación 2, utilizando aritmética de base 10, es decir

$$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 13.375$$

**Conclusión :** para pasar un número en base  $b$  a base decimal se aplica la expresión (1), operando en aritmética decimal.

## 1.1 Regla de las restas sucesivas

Una alternativa posible es restar sucesivamente las potencias de 2, partiendo por la más alta que cabe en el número a convertir, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}147 - 2^7 &= 19 \implies 1 \\19 - 2^6 &< 0 \implies 0 \\19 - 2^5 &< 0 \implies 0 \\19 - 2^4 &= 3 \implies 1 \\3 - 2^3 &< 0 \implies 0 \\3 - 2^2 &< 0 \implies 0 \\3 - 2^1 &= 1 \implies 1 \\1 - 2^0 &= 0 \implies 1\end{aligned}$$

Como se aprecia, este método es una forma de aplicación inversa de la ecuación (1). El número binario correspondiente es el de la columna de la derecha, desde el dígito más significativo hasta el menos significativo (10010011).

Este método de restas sucesivas es evidentemente aplicable además a números con parte fraccionaria.

## 1.2 Regla de las divisiones sucesivas

Si se lo analiza en detalle, el método que veremos ahora también es una forma inversa de aplicar la expresión (1). Sin embargo en esta ocasión el primer dígito obtenido corresponderá al menos significativo. Contrariamente al método de las restas sucesivas, este método no es aplicable a números con parte fraccionaria.

Consideremos el mismo ejemplo anterior, pasar a base 2 el número  $(147)_{10}$ . El procedimiento consiste en dividir repetidamente por dos generando sólo la parte entera de la división. El resto corresponderá al dígito buscado.

$$\begin{array}{rcl}
 147 & : & 2 = 73 \\
 1 & & \longrightarrow 1 \\
 \\ 
 73 & : & 2 = 36 \\
 1 & & \longrightarrow 1 \\
 \\ 
 36 & : & 2 = 18 \\
 0 & & \longrightarrow 0 \\
 \\ 
 18 & : & 2 = 9 \\
 0 & & \longrightarrow 0 \\
 \\ 
 9 & : & 2 = 4 \\
 1 & & \longrightarrow 1 \\
 \\ 
 4 & : & 2 = 2 \\
 0 & & \longrightarrow 0 \\
 \\ 
 2 & : & 2 = 1 \\
 0 & & \longrightarrow 0 \\
 \\ 
 1 & : & 2 = 0 \\
 1 & & \longrightarrow 1
 \end{array}$$

La columna de la derecha contiene el número buscado, sin embargo, como dijimos, en esta ocasión el primer dígito obtenido es el menos significativo y el último el más significativo.

El método de las divisiones sucesivas no sólo es válido para pasar un número decimal a base 2. Dividiendo por la base correspondiente  $b$  es posible pasar a cualquier base, operando en aritmética decimal.

### 1.3 Regla de las multiplicaciones sucesivas

Como se mencionó, la regla de las divisiones sucesivas no es aplicable a la parte fraccionaria de un número. Supongamos que debemos pasar el número  $(147,6875)_{10}$  a base 2. En este caso la parte entera  $(147)_{10}$  se pasa utilizando la regla de las divisiones sucesivas. Para la parte fraccionaria se procede de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl}
 & 0.6875 & \times 2 \\
 1 & \longleftarrow & 1.3750 \\
 \\ 
 & 0.375 & \times 2 \\
 0 & \longleftarrow & 0.750 \\
 \\ 
 & 0.75 & \times 2 \\
 1 & \longleftarrow & 1.50 \\
 \\ 
 & 0.5 & \times 2 \\
 1 & \longleftarrow & 1.0
 \end{array}$$

En esta regla, el dígito más significativo es el que se obtiene primero, y el menos significativo el último. Como se ve en el ejemplo, el proceso termina cuando la parte fraccionaria se hace 0. Es importante notar que en algunos casos este proceso puede ser  $\infty$  ya que una parte fraccionaria con número finito de dígitos en una base  $b_1$  puede no tener representación exacta en otra base  $b_2$ .

**Tabla 1:** Combinaciones binarias correspondientes al sistema numérico octal y hexadecimal.

Binario	Octal	Binario	Hexadecimal
000 $\rightarrow$	0	0000 $\rightarrow$	0
001 $\rightarrow$	1	0001 $\rightarrow$	1
010 $\rightarrow$	2	0010 $\rightarrow$	2
011 $\rightarrow$	3	0011 $\rightarrow$	3
100 $\rightarrow$	4	0100 $\rightarrow$	4
101 $\rightarrow$	5	0101 $\rightarrow$	5
110 $\rightarrow$	6	0110 $\rightarrow$	6
111 $\rightarrow$	7	0111 $\rightarrow$	7
		1000 $\rightarrow$	8
		1001 $\rightarrow$	9
		1010 $\rightarrow$	A
		1011 $\rightarrow$	B
		1100 $\rightarrow$	C
		1101 $\rightarrow$	D
		1110 $\rightarrow$	E
		1111 $\rightarrow$	F

Veamos algunos ejemplos típicos de conversión entre base binaria, octal y hexadecimal.

1.  $(1101011101, 0111011)_2 \rightarrow (N)_8$

$$\begin{array}{ccccccc} ( & \underbrace{001} & \underbrace{101} & \underbrace{011} & \underbrace{101} & , & \underbrace{011} & \underbrace{101} & \underbrace{100} & )_2 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ( & 1 & 5 & 3 & 5 & , & 3 & 5 & 4 & )_8 \end{array}$$

2.  $(E4A,5C)_{16} \rightarrow (N)_2$

$$\begin{array}{ccccccc} E & 4 & A & , & 5 & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{1110} & \underbrace{0100} & \underbrace{1010} & , & \underbrace{0101} & \underbrace{1100} \end{array}$$

3.  $(B7,D)_{16} \rightarrow (N)_8$

$$\begin{array}{ccccccc} ( & \underbrace{B} & \underbrace{7} & , & \underbrace{D} & )_{16} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ ( & \underbrace{1011} & \underbrace{0111} & , & \underbrace{1101} & )_2 & = & ( & \underbrace{010} & \underbrace{110} & \underbrace{111} & , & \underbrace{110} & \underbrace{100} & )_2 \\ & & & & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ & & & & & & & 2 & 6 & 7 & , & 6 & 4 & )_8 \end{array}$$

Es importante notar que los grupos de 3 o 4 dígitos binarios deben hacerse de derecha a izquierda para la parte entera y de izquierda a derecha para la parte fraccionaria. Para completar los grupos se agregan ceros a la izquierda para la parte entera y a la derecha para la parte fraccionaria.

## Convertir entre los diferentes sistemas numéricos.

Decimal	Binario	Octal	Hexadecimal
125.2			
	10110101.01		
		73.42	
			A2C.1E

## Binary To Decimal Conversion

[illegible]

Use all 8 bits for each problem

[illegible]



## EJEMPLOS DE OPERACIONES ARITMÉTICAS EN DIFERENTES SISTEMAS NUMÉRICOS.

### Suma en binario.

$$\begin{array}{r} 10110001.0111_{(2)} \\ + 1011101.101_{(2)} \\ \hline 100001111.0001_{(2)} \end{array}$$

#### Explicación por columna:

0+1=1 Dígito válido en binario.

1+1=2 El 2 no es válido en binario. Cuando esto ocurre se deberá dividir entre la base, colocando el resto debajo de la línea y sumando el cociente a los números de la siguiente columna de la izquierda. En este caso al dividir 2 entre 2 el cociente es 1 y el resto 0.

1+1+0=2 Nuevamente al dividir 2 entre 2 se obtiene cociente 1 resto 0.

1+0+1=2 Cociente 1 resto 0.

1+1+1=3 El 3 tampoco es válido, por lo tanto al dividirlo entre la base 2 se obtiene un cociente 1 y resto 1.

1+0+0=1 Dígito válido.

0+1=1 Dígito válido.

0+1=1 Dígito válido.

1+1=2 Cociente 1 resto 0

1+1+0=2 Cociente 1 resto 0

1+0+1=2 Cociente 1 resto 0

1+1=2 Cociente 1 resto 0. Como se trata de la última columna el cociente también se coloca debajo de la línea, como parte del resultado de la suma.

### Suma en octal.

$$\begin{array}{r} 54032.16_{(8)} \\ + 27043.643_{(8)} \\ \hline 103076.023_{(8)} \end{array}$$

#### Explicación por columna:

0+3=3 Dígito válido en octal.

6+4=10 El 10 no es válido en octal por lo tanto al dividir entre la base 8 se obtiene un cociente es y el resto 2.

1+1+6=8 El 8 no es válido, de tal forma que al dividirlo entre la base se obtiene cociente 1 y resto 0.

1+2+3=6 Dígito válido.

3+4=7 Dígito válido.

0+0=0 Dígito válido.

4+7=11 Al dividir entre la base se obtiene cociente 1 resto 3.

$1+5+2=$  El 8 no es válido en octal de tal forma que al dividirlo entre la base se obtiene cociente 1 resto 0

### Resta en binario.

$$\begin{array}{r}
 101110101.101_{(2)} \\
 - 11011001.1001_{(2)} \\
 \hline
 010011100.0001_{(2)}
 \end{array}$$

### Explicación por columna:

$(0+2)-1=1$  Sumar la base porque sustraendo > minuendo ( $1 > 0$ ).

$1+(0+1)=0$  Sumar 1 al sustraendo porque se sumo la base al minuendo en la columna anterior.

$0-0=0$  En este caso no hay suma de base al minuendo, ya que no se cumple que sustraendo > minuendo.

$1-1=0$  Mismo caso anterior.

$1-1=0$  Mismo caso anterior.

$0-0=0$  Mismo caso anterior.

$1-0=1$  Tampoco se le suma la base al minuendo ya que no se cumple que sustraendo > minuendo.

$(0+2)-1=1$  Se cumple que sustraendo > minuendo por lo tanto se le suma la base al minuendo.

$(1+2)-((1+1))=1$  Primero se le suma 1 al sustraendo  $(1+1)=2$  y como este resultado hace que se cumpla la condición sustraendo > minuendo  $2 > 1$ , entonces se deberá sumar la base al minuendo antes de hacer la resta  $(1+2)-2=1$ .

$1-(0+1)=0$  Sumar 1 al sustraendo debido a que se sumó la base en la columna anterior.

$1-1=0$  No se cumple que sustraendo > minuendo, por lo tanto la resta se lleva a cabo sin cambios.

$(0+2)-1=1$  Debido a que se cumple que sustraendo > minuendo se suma la base al minuendo.

$1-(0+1)=0$  Sumar 1 al sustraendo cuando en la columna anterior se sumó la base al minuendo.

### Resta en hexadecimal.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ C } 2 \text{ 8 A } . 4 \text{ 1 } F_{(16)} \\ - \quad E \text{ 9 B } 7 . 4 \text{ 4 } 2_{(16)} \\ \hline 2 \text{ D } 8 \text{ D } 2 . F \text{ D } D_{(16)} \end{array}$$

#### Explicación por columna:

$15 - 2 = 13$  El 13=D es un dígito válido en hexadecimal.

$(1+16) - 4 = 13$  Se suma la base al minuendo ya que sustraendo > minuendo.

$(4+16) - (4+1) = 15$  Se suma 1 al sustraendo (4+1) y como con esta suma el sustraendo > minuendo (5 > 4) se le debe sumar la base al minuendo antes de hacer la resta  $(4+16) - 5 = 15$ , donde 15=F.

$10 - (7+1) = 2$  Sumar 1 al sustraendo porque en la columna anterior se sumó la base al minuendo.

$(8+16) - 11 = 13$  Sumar la base al minuendo ya que sustraendo > minuendo.

$(2+16) - (9+1) = 8$  Sumar 1 al sustraendo, debido a que se sumó la base al minuendo en la columna anterior  $(9+1)=10$ , debido a que sustraendo > minuendo sumar ahora la base al minuendo para poder realizar la resta.

$(12+16) - (14+1) = 13$  Primero se suma 1 al sustraendo, debido que se sumó la base al minuendo en la columna anterior, después se le suma la base al minuendo porque el sustraendo > minuendo y se realiza la resta.

$3 - (0+1) = 2$  Por último se suma 1 al sustraendo ya que se sumó al minuendo la base en la columna anterior y después se realiza la resta.

### Multiplicación en octal.

$$\begin{array}{r}
 \phantom{X} \phantom{00000000} 4 \ 5 \ 0 \ 3 \ 2 \ . \ 3 \ 7_{(8)} \\
 X \phantom{00000000} \phantom{00000000} 6 \ 5 \ 4 \ .2_{(8)} \\
 \hline
 \phantom{00000000} 1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 6 \ 4 \ 7 \ 6 \\
 \phantom{00000000} 2 \ 2 \ 4 \ 1 \ 5 \ 1 \ 7 \ 4 \\
 \phantom{00000000} 2 \ 7 \ 1 \ 2 \ 0 \ 4 \ 3 \ 3 \\
 \phantom{00000000} 3 \ 3 \ 6 \ 2 \ 3 \ 6 \ 7 \ 2 \\
 \hline
 3 \ 6 \ 7 \ 7 \ 3 \ 3 \ 1 \ 5 \ .7 \ 3 \ 6_{(8)}
 \end{array}$$

Como al multiplicar  $2 \times 7 = 14$ , el 14 se divide entre la base=8 para obtener cociente=1 y resto=6. El 6 se coloca debajo de la línea y se lleva 1, el cual se suma en el siguiente producto, al multiplicar  $2 \times 3 + 1 = 7$ , como el 7 es un símbolo válido en octal, se coloca debajo de la línea y así hasta terminar el dígito de la extrema derecha del multiplicador, por todos y cada uno de los dígitos del multiplicando. La suma de las columnas y separación de la parte fraccionaria se realiza de forma similar a como se hizo en el sistema decimal.

### Multiplicación en hexadecimal.

$$\begin{array}{r}
 \phantom{X} \phantom{00000000} 7 \ E \ 3 \ A \ 8 \ .2_{(16)} \\
 X \phantom{00000000} \phantom{00000000} B \ D \ .7 \ A_{(16)} \\
 \hline
 \phantom{00000000} 4 \ E \ E \ 4 \ 9 \ 1 \ 4 \\
 \phantom{00000000} 3 \ 7 \ 3 \ 9 \ 9 \ 8 \ E \\
 \phantom{00000000} 6 \ 6 \ 8 \ F \ 8 \ 9 \ A \\
 \phantom{00000000} 5 \ 6 \ C \ 8 \ 3 \ 9 \ 6 \\
 \hline
 5 \ D \ 6 \ D \ 5 \ 9 \ D \ .B \ F \ 4_{(16)}
 \end{array}$$

Se sabe que en hexadecimal además de los dígitos del 0 al 9 se pueden usar A=10, B=11,...,F=16. Como al multiplicar  $10 \times 2 = 20$  y el 20 no es dígito válido en el sistema hexadecimal, se debe dividir entre la base=16, para obtener cociente=1 resto=4. Se puede ver que el resto se coloca debajo de la línea y el cociente se suma al resultado de la siguiente multiplicación  $10 \times 8 + 1 = 81$ . Al dividir 81 entre 16 se obtiene cociente=5 y resto=1. El resto se coloca debajo de la línea y se llevan cinco que se deben de sumar al siguiente producto  $10 \times 10 + 5 = 105$  para obtener cociente=6 y resto=9, se coloca debajo de la línea el 9 y se llevan 6, y así sucesivamente hasta terminar. Por último se suman los resultados de las líneas y al final se coloca el punto para separar la parte fraccionaria.

Dividir  $1011011101101.0011_{(2)}$  entre  $101.1_{(2)}$

[illegible]

En nuestro caso se cumple la condición ya que  $1010_{(2)} \leq 1011_{(2)}$ , por lo tanto cociente=1, se multiplica el cociente por el divisor ( $1 \times 1010_{(2)} = 1010_{(2)}$ ) y el resultado se resta al dividendo ( $1011_{(2)} - 1010_{(2)} = 0001_{(2)}$ ), se baja el siguiente dígito del dividendo para obtener  $00010_{(2)} = 10_{(2)}$  como no se cumple la condición el cociente es 0, y se baja otro dígito obteniendo de esa forma  $101_{(2)}$ , nuevamente no se cumple la condición, de tal forma que se coloca en el cociente otro 0 y se baja otro dígito para obtener la siguiente cantidad  $1011_{(2)}$ , como con esta cantidad ahora si se cumple la condición, entonces el cociente=1, ese cociente se multiplica por el divisor y se le resta al dividendo.

De esa manera se continúa hasta terminar.

### División en octal.

Dividir  $503462.37_{(8)}$  entre  $723.4_{(8)}$

Como se mencionó anteriormente lo primero que se debe realizar es recorrer el punto que separa la parte entera de la parte fraccionaria a la derecha del dígito menos significativo del divisor y recorrer esas mismas posiciones en el mismo sentido el punto octal en el dividendo. De tal manera que la división quedaría:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & 5 & 4 & 2 & .3 & 1_{(8)} \\
 7 & 2 & 3 & 4_{(8)} & | & 5 & 0 & 3 & 4 & 6 & 2 & 3 & .7_{(8)} \\
 & & & & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 & & & & \\
 & & & 0 & 3 & 7 & 3 & 2 & 2 & & & & \\
 & & & & 3 & 5 & 1 & 6 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 & & & & \\
 & & & & 1 & 6 & 4 & 7 & 0 & & & & \\
 & & & & 2 & 7 & 3 & 3 & 7 & & & & \\
 & & & & 2 & 5 & 7 & 2 & 4 & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & 4 & 1 & 3 & 0 & & & \\
 & & & & & 7 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
 & & & & & 4 & 6 & 7 & 4 & & & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

Lo común es que si el divisor tiene cuatro cifras se tomen también las primeras cuatro cifras del dividendo para obtener la primera cifra del cociente, pero como en este caso, el divisor ( $7234_{(8)}$ ) es mayor que las cuatro primeras cifras del dividendo ( $5034_{(8)}$ ) se toma una cifra más, de tal forma que el número de veces que cabe  $7234_{(8)}$  en  $50346_{(8)}$  es  $5_{(8)}$ . Se multiplica  $5_{(8)} * 7234_{(8)} = 44414_{(8)}$ , para restar después  $50346_{(8)} - 44414_{(8)} = 03732_{(8)}$ , por último se baja una cifra y se procede así hasta terminar la división. En la división anterior se observa que solamente existe una cifra después del punto octal (o punto decimal en base diez), sin embargo de manera semejante a como se realiza en el sistema decimal, se pueden seguir encontrando octales (o decimales), si se agrega un 0 al resto.

Así como es posible comprobar si está correcta una división en el sistema decimal, multiplicando el divisor por el cociente y sumándole a ese resultado el residuo de la división para obtener el dividendo, también es posible hacer dicha comprobación en cualquier sistema numérico.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & 5 & 4 & 2 & .3 & 1_{(8)} & \leftarrow \text{Cociente} \\
 \text{X} & & & 7 & 2 & 3 & 4_{(8)} & \leftarrow \text{Divisor} \\
 \hline
 & & 5 & 6 & 1 & 1 & 4 & 4 \\
 & 2 & 0 & 4 & 7 & 1 & 3 & \\
 & 1 & 3 & 0 & 4 & 6 & 2 & \\
 & 4 & 6 & 6 & 0 & 5 & 7 & \\
 \hline
 & 5 & 0 & 3 & 4 & 5 & 5 & 4 & 7 & 4_{(8)} \\
 & & & & 4 & 6 & 7 & 4_{(8)} & \leftarrow \text{Residuo} \\
 \hline
 & 5 & 0 & 3 & 4 & 6 & 2 & 3 & 7 & 0_{(8)} & \leftarrow \text{Dividendo}
 \end{array}
 \end{array}$$

## SUMA DE DOS CANTIDADES EN COMPLEMENTO A 2.

Realmente las operaciones que la computadora realiza internamente se llevan a cabo en forma muy diferente a la que nosotros estamos acostumbrados, se sabe de antemano que el sistema numérico utilizado es el binario y que la operación básica es la suma. En computación las cantidades se representan por un conjunto de bits (ceros y unos), usando un bit exclusivo para distinguir las cantidades negativas de las positivas, el cual recibe el nombre de “bit de signo”. La convención más común para el signo es 0=positivo y 1=negativo.

Existen tres formas de representar cantidades, estas son: magnitud verdadera, complemento a 1 y complemento a 2. Cada una de ellas tiene su utilidad, dentro de la computación.

**Magnitud verdadera.**

En la representación en magnitud verdadera se muestran los bits en forma real, una característica de este tipo de representación es que se puede saber fácilmente a cuanto equivale ese conjunto de bits en el sistema decimal, usando para ello la representación exponencial.

$$1 \ 110110101.011_{(2)} = -1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} = 437.44_{(10)}$$

### Complemento a 1.

Como en el sistema binario solamente existen como dígitos válidos el 0 y el 1, por lo tanto se dice que el complemento de 0 es 1 y el complemento de 1 es 0. El complemento de un número en binario se obtiene complementando cada uno de los bits, sin considerar el signo.

1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	.	0	1	<sub>(2)</sub>	Magnitud verdadera
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	.	1	0	<sub>(2)</sub>	Complemento a 1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	.	1	0	0	<sub>(2)</sub>	Magnitud verdadera			
0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	.	0	1	1	<sub>(2)</sub>	Complemento a 1			

Se puede observar que para obtener el complemento a 1 de una cantidad expresada en binario, solamente es suficiente con cambiar todos los ceros por unos y los unos por ceros, pero en ningún momento se cambia el bit de signo, que en este caso es el bit de la extrema izquierda.

El complemento a 2 se obtiene sumando 1 al bit menos significativo del complemento a 1.

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad . \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad (2) \quad \text{Complemento a 1} \\ + \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad . \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad (2) \quad \text{Complemento a 2} \end{array}$$

Primero convierte los valores de A y B a binario, y posteriormente se realiza la suma de la siguiente manera:

El resultado obtenido es  $1\ 00100101_{(2)} = -45_{(10)}$ , que es muy diferente al  $+301_{(10)}$  esperado. Lo que ocurrió es que se presentó un “desbordamiento” al querer guardar en la variable C definida de 8 bits, una cantidad mayor. Este error es muy común que ocurra al momento de estar programando, ya que se definen las variables de cierto tipo y con cierta capacidad y algunas veces se desea guardar en ellas una cantidad que sobrepasa esa capacidad. La finalidad de citar este caso es porque se deben considerar todos los elementos que se presentan al momento de que la computadora realiza una operación aritmética.

Para resolver el problema de desbordamiento es conveniente definir a las variables con una capacidad mayor, por ejemplo suponer que las variables A, B y C son enteras pero ahora



10

## Signo

### Resultado negativo

Sumar  $A = +225$  con  $B = -76$

### Magnitud verdadera

## Acarreo

Sumar  $A = -225$  con  $B = -76$

$$\begin{array}{r}
 -225_{(10)} = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ (2) \text{ Magnitud verdadera} \\
 = \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ (2) \text{ Complemento a 1} \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ (2) \text{ Complemento a 2} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -76_{(10)} = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ (2) \text{ Magnitud verdadera} \\
 = \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ (2) \text{ Complemento a 1} \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ (2) \text{ Complemento a 2} \end{array}
 \end{array}$$

Sumando:

$$\begin{array}{r}
 -225_{(10)} = 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ (2) \\
 -76_{(10)} = 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ (2) \\
 -301_{(10)} = 11\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ (2)
 \end{array}$$

Acarreo
Signo
Magnitud

Si se convierte a decimal el resultado obtenido es posible observar que no es el esperado de  $-301_{(10)}$ . Sin embargo se sabe que cuando el resultado de la suma es negativo se deberá complementar a 2. En este caso también se tiene acarreo, el cual se desprecia.

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ (2) \text{ Resultado negativo} \\
 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ (2) \text{ Complemento a 1} \\
 -301 = \begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ (2) \text{ Complemento a 2} \end{array}
 \end{array}$$

### Ejercicios:

Realizar la suma en complemento a 2, en cada uno de los siguientes incisos. Considerar que las cantidades que se están sumando se definen como enteras y que ocupan 2 bytes de memoria. Agregar bytes en caso de ser necesario, para evitar el desbordamiento.

a)  $\begin{array}{r} +\ 6\ 5\ 5\ 0\ 8\ (10) \\ +\ 1\ 0\ 3\ (10) \\ \hline \end{array}$

b)  $\begin{array}{r} -\ 6\ 5\ 5\ 0\ 8\ (10) \\ +\ 1\ 0\ 3\ (10) \\ \hline \end{array}$

c)  $\begin{array}{r} +\ 6\ 5\ 5\ 0\ 8\ (10) \\ -\ 1\ 0\ 3\ (10) \\ \hline \end{array}$

c)  $\begin{array}{r} -\ 6\ 5\ 5\ 0\ 8\ (10) \\ -\ 1\ 0\ 3\ (10) \\ \hline \end{array}$



# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA REGIÓN CARBONÍFERA

## Formato de Prácticas

Materia: Matemáticas Discretas Especialidad: Ing. En Sistemas Computacionales

Unidad II. Conjuntos

Objetivo: Resolver problemas que impliquen operaciones y propiedades de conjuntos, utilizando leyes y diagramas.

## Teoría de Conjuntos

### NOCION INTUITIVA DE CONJUNTO

Un **conjunto** es la reunión en un todo de objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que se llaman elementos del mismo.

Si  $a$  es un elemento del conjunto  $A$  se denota con la **relación de pertenencia**  $a \in A$ .  
En caso contrario, si  $a$  no es un elemento de  $A$  se denota  $a \notin A$ .

Ejemplos de conjuntos:

- $\emptyset$  : el *conjunto vacío*, que carece de elementos.
- **N**: el conjunto de los *números naturales*.
- **Z**: el conjunto de los *números enteros*.
- **Q** : el conjunto de los *números racionales*.
- **R**: el conjunto de los *números reales*.
- **C**: el conjunto de los *números complejos*.

Se puede *definir* un conjunto:

- por *extensión*, enumerando todos y cada uno de sus elementos.
- por *comprensión*, diciendo cuál es la propiedad que los caracteriza.

Un conjunto se suele *denotar* encerrando *entre llaves* a sus elementos, si se define por

extensión,

o su propiedad característica, si se define por comprensión. Por ejemplo:

- $A := \{1, 2, 3, \dots, n\}$
- $B := \{p \in \mathbf{Z} \mid p \text{ es par}\}$

Se dice que A está contenido en B (también que A es un **subconjunto** de B o que A es una parte de B),

y se denota  $A \subseteq B$ , si todo elemento de A lo es también de B, es decir,  $a \in A \Rightarrow a \in B$ .

Dos conjuntos A y B se dicen *iguales*, y se denota  $A = B$ , si simultáneamente  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ ;  
esto equivale a decir que tienen los mismos elementos (o también la misma propiedad característica).

Para cualquier conjunto A se verifica que  $\emptyset \subseteq A$  y  $A \subseteq A$ ;

$B \subseteq A$  es un *subconjunto propio* de A si  $A \neq \emptyset$  y  $B \neq A$ .

El conjunto formado por todos los subconjuntos de uno dado A se llama **partes** de A, y se denota  $\wp(A)$ .

Entonces, la relación  $B \subseteq A$  es equivalente a decir  $B \in \wp(A)$ . Ejemplos:

Si  $A = \{a, b\}$  entonces  $\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$ .

Si  $a \in A$  entonces  $\{a\} \in \wp(A)$ .

Cuando en determinado contexto se consideran siempre conjuntos que son partes de uno dado U,

se suele considerar a dicho U como **conjunto universal** o de referencia.

## OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, se llama **diferencia** al conjunto  $A - B := \{a \in A \mid a \notin B\}$ .

Asimismo, se llama **diferencia simétrica** entre A y B al conjunto  $A \Delta B := (A - B) \cup (B - A)$ .

Si  $A \in \wp(U)$ , a la diferencia  $U - A$  se le llama **complementario** de A respecto de U,

y se denota abreviadamente por  $A'$  (U se supone fijado de antemano).

Es fácil ver que si A y B son subconjuntos cualesquiera de U se verifica:

- $\emptyset' = U$ .

- $U' = \emptyset$ .
- $(A')' = A$ .
- $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$ .
- Si  $A = \{x \in U \mid p(x) \text{ es una proposición verdadera}\}$  entonces  $A' = \{x \in U \mid p(x) \text{ es una proposición falsa}\}$ .

Se llama **unión** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A o de B,

es decir:  $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ .

Se llama **intersección** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A y de B,

es decir:  $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ .

Si A y B son subconjuntos de un cierto conjunto universal U, entonces es fácil ver que  $A - B = A \cap B'$ .

En este caso, la llamadas **operaciones booleanas** (unión e intersección) verifican las siguientes *propiedades* :

PROPIEDADES	UNION	INTERSECCION
<b>1.- Idempotencia</b>	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
<b>2.- Conmutativa</b>	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
<b>3.- Asociativa</b>	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
<b>4.- Absorción</b>	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
<b>5.- Distributiva</b>	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
<b>6.- Complementariedad</b>	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \emptyset$

Estas propiedades hacen que partes de U con las operaciones unión e intersección tenga una estructura de álgebra de Boole.

Además de éstas, se verifican también las siguientes propiedades:

- $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$  (*elemento nulo*).
- $A \cup U = U$ ,  $A \cap U = A$  (*elemento universal*).
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ,  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  (*leyes de Morgan*).

Dados dos conjuntos A y B, se define el **producto cartesiano** de ambos como el conjunto de pares ordenados:

$$A \times B := \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$$

Dos pares (a,b) y (c,d) de  $A \times B$  son *iguales* si  $a = c$  y  $b = d$ ; análogamente, dados cuatro conjuntos A,B,C,D se verifica

$$A \times B = C \times D \Leftrightarrow (A = C \wedge B = D)$$

Se llama **grafo** relativo a  $A \times B$  a todo subconjunto  $G \subseteq A \times B$ .

Dado un grafo G relativo a  $A \times B$ , se llama **proyección** de G sobre A al conjunto

$$\text{Proy}_A G := \{ a \in A : (a,b) \in G, \exists b \in B \}$$

Análogamente se define la proyección  $\text{Proy}_B G$  de G sobre B.

Por último, los conceptos anteriores pueden *generalizarse a familias de conjuntos*.

Si para cada elemento i de un conjunto (de *índices*) I se tiene un conjunto  $A_i$ , entonces se define el conjunto  $\{ A_i : i \in I \}$

y se denomina **familia de conjuntos** indicada por I. También se suele denotar por  $\{ A_i \}_{i \in I}$ .

De forma análoga se define una *familia de elementos*  $(a_i)_{i \in I}$ .

Dada una familia de conjuntos  $\{ A_i \}_{i \in I}$  se definen:

- $\bigcup_{i \in I} A_i := \{ a : a \in A_i, \exists i \in I \}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i := \{ a : a \in A_i, \forall i \in I \}$
- $\prod_{i \in I} A_i := \{ (a_i) : a_i \in A_i, \forall i \in I \}$

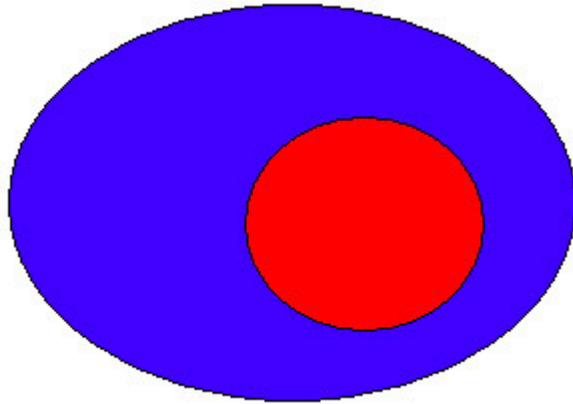
Las propiedades de la unión e intersección siguen siendo válidas para familias de conjuntos, y en particular las *leyes de Morgan* :

$$(\bigcup_{i \in I} A_i)' = \bigcap_{i \in I} A_i' \quad , \quad (\bigcap_{i \in I} A_i)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$$

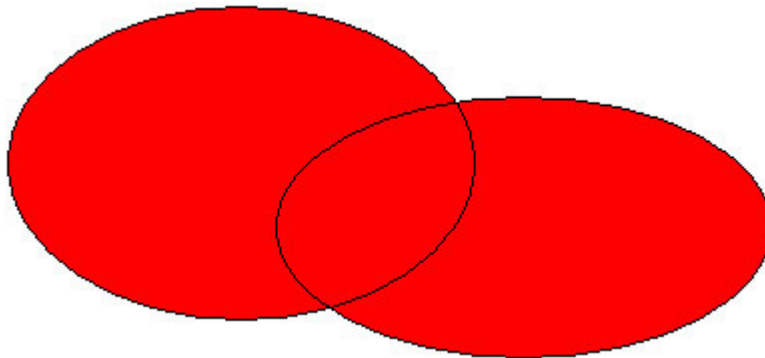
## DIAGRAMAS DE VENN

Los conjuntos se suelen representar gráficamente mediante "diagramas de Venn", con una línea que encierra a sus elementos. Así, todas las operaciones entre conjuntos se pueden representar gráficamente con el fin de obtener una idea más intuitiva.

$$A \subseteq B$$

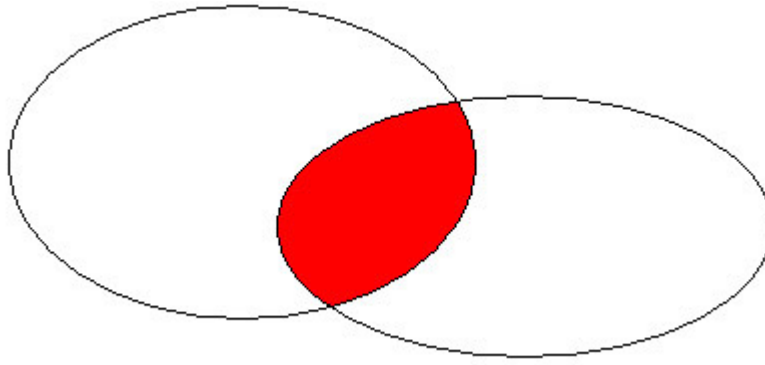


$$A \cup B$$

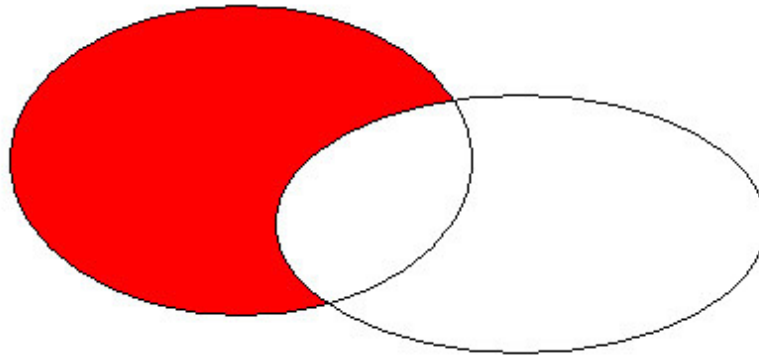


$$A \cap B$$

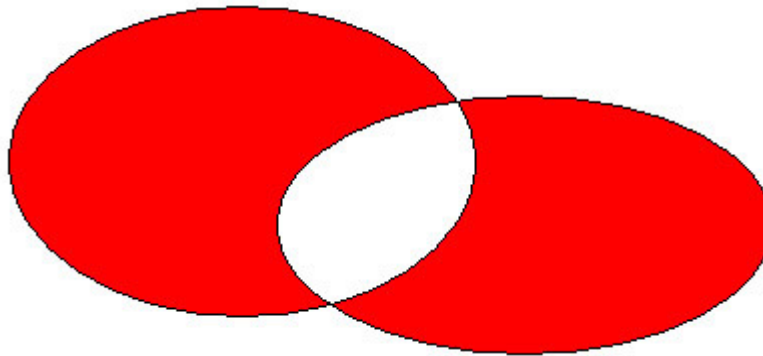




$A - B$



$A \Delta B$



## **RELACION ENTRE LA TEORIA DE CONJUNTOS Y LA LOGICA PROPOSICIONAL**

Existe una relación muy estrecha entre la Teoría de Conjuntos y la Lógica Proposicional.

Para mostrar dicha relación, denotemos por letras mayúsculas A,B ... los conjuntos y por las correspondientes minúsculas a,b ... sus propiedades características (es decir, la proposición lógica que caracteriza a los elementos de cada conjunto); entonces se tiene la siguiente correspondencia:

<b>conjuntos</b>	$A \subseteq B$	$A = B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A'$	$A - B$	$A \Delta B$
<b>proposiciones</b>	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a'$	$a \wedge b'$	$a \underline{\vee} b$

Además, el conjunto vacío se corresponde con una *contradicción* y el conjunto universal con una *tautología*.

Mediante esta correspondencia, todos los resultados sobre conjuntos se pueden reescribir en términos de lógica proposicional y viceversa; a modo de ejemplo:

$A \cup (A \cap B) = A$	$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow a$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(a \vee b)' \Leftrightarrow a' \wedge b'$

## PROPOSICIONES CON CUANTIFICADORES

Los símbolos  $\forall$  (cuantificador universal) y  $\exists$  (cuantificador existencial) se utilizan en Matemáticas para enunciar proposiciones lógicas relativas a objetos matemáticos.

Sea A un conjunto y p(x) una proposición o propiedad que hace referencia a un elemento x.

**(1) Cuantificador universal :** La expresión

$$\forall x \in A \Rightarrow p(x)$$

se lee "para todo x que pertenece a A se verifica p(x)", representa la proposición

$$\{ x \in A : p(x) \} = A$$

(2) Cuantificador existencial : La expresión

$$\exists x \in A \mid p(x)$$

se lee "existe x que pertenece a A tal que p(x)", representa la proposición

$$\{ x \in A : p(x) \} \neq \emptyset$$

La negación de cualquiera de las dos proposiciones anteriores se realiza negando la proposición p(x)

y cambiando el cuantificador universal por el cuantificador existencial, o viceversa.

Así, la negación de la proposición " $\forall x \in A \Rightarrow p(x)$ " es " $\exists x \in A \mid p(x)'$ ", mientras que

la negación de " $\exists x \in A \mid p(x)$ " es " $\forall x \in A \Rightarrow p(x)'$ "



# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA REGIÓN CARBONÍFERA

## Formato de Prácticas

Materia: Matemáticas Discretas Especialidad: Ing. En Sistemas Computacionales

Unidad III. Lógica Matemática

Objetivo: Analizar y resolver problemas computacionales utilizando las técnicas básicas de lógica e inducción matemáticas.

## Lógica proposicional

Una **proposición** es cualquier enunciado lógico al que se le pueda asignar un valor de verdad (**1**) o falsedad (**0**).

Dada una proposición  $p$ , se define la **negación** de  $p$  como la proposición  $p'$  que es verdadera cuando  $p$  es falsa y que es falsa cuando  $p$  es verdadera. Se lee "no  $p$ ".

A partir de una o varias proposiciones elementales se pueden efectuar diversas **operaciones lógicas** para construir nuevas proposiciones; en este caso, se necesita conocer su valor de verdad o falsedad en función de los valores de las proposiciones de que se componen, lo cual se realiza a través de las **tablas de verdad** de dichas operaciones.

Por ejemplo, la tabla de verdad de la *negación* es la siguiente:

$p$	$p'$
1	0
0	1

A continuación se describen las principales operaciones lógicas entre dos proposiciones  $p, q$  y sus tablas de verdad:

**Conjunción:** es aquella proposición que es verdadera cuando  $p$  y  $q$  son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.

Se escribe  $p \wedge q$ , y se lee " $p$  y  $q$ ".

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

**Disyunción:** es aquella proposición que es verdadera cuando al menos una de las dos  $p$  o  $q$  es verdadera,

y falsa en caso contrario. Se escribe  $p \vee q$ , y se lee " $p$  o  $q$ ".

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

**Disyunción exclusiva:** es aquella proposición que es verdadera cuando una y sólo una de las dos  $p$  o  $q$  es verdadera,

y falsa en cualquier otro caso. Se escribe  $p \underline{\vee} q$ , y se lee " $p$  o  $q$  pero no ambas". Se usa muy poco.

$p$	$q$	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

**Condicional:** es aquella proposición que es falsa únicamente cuando la **condición suficiente**  $p$  es verdadera y la **condición necesaria**  $q$  es falsa. Se escribe  $p \Rightarrow q$ , y se lee "si  $p$  entonces  $q$ ".

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

**Bicondicional:** es aquella proposición que es verdadera cuando  $p$  y  $q$  tienen el mismo valor de verdad, y falsa en caso contrario. Se escribe  $p \Leftrightarrow q$ , y se lee "si y sólo si  $p$  entonces  $q$ ".

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Una proposición se dice que es una **tautología** si su valor de verdad es siempre **1** independientemente de los valores de las proposiciones que lo componen; por ejemplo:  $p \vee p'$ .

Una proposición se dice que es una **contradicción** si su valor de verdad es siempre **0** independientemente de los valores de las proposiciones que lo componen; por ejemplo:  $p \wedge p'$ .

Una **paradoja** es una proposición a la que no se le puede asignar ningún valor de verdad; suelen estar relacionadas con incorrecciones en el lenguaje lógico. Por ejemplo:  $p = \text{"la proposición } p \text{ es falsa"}$ .

Dos proposiciones  $p$  y  $q$  se dicen **equivalentes** si tienen la misma tabla de verdad en función de las proposiciones elementales que lo componen; esta definición equivale a decir que la proposición  $p \Leftrightarrow q$  es una tautología. Por ejemplo, las proposiciones

$$p \Rightarrow q$$

y

$$q' \Rightarrow p'$$

son equivalentes. Esta ley se llama "ley del contrarrecíproco", y se usa en los razonamientos por **reducción al absurdo**.

Se pueden obtener fácilmente más "resultados lógicos" a través de su [relación con la teoría de conjuntos](#).



# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA REGIÓN CARBONÍFERA

## Formato de Prácticas

Materia: Matemáticas Discretas Especialidad: Ing. En Sistemas Computacionales

Unidad IV. Álgebra booleana

Objetivo: Aplicar los conceptos básicos, teoremas, mapas de Karnaugh y propiedades del álgebra booleana, para optimizar expresiones booleanas y diseñar circuitos básicos con compuertas lógicas.





# **INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA REGIÓN CARBONÍFERA**

## **Formato de Prácticas**

Materia:            Matemáticas Discretas            Especialidad: Ing. En Sistemas Computacionales

Unidad V.           Relaciones

Objetivo:           comprender el uso de las relaciones en el diseño y análisis de problemas computacionales relacionados con bases de datos, graficación, sistemas operativos, redes y programación.



# **INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA REGIÓN CARBONÍFERA**

## **Formato de Prácticas**

Materia:            Matemáticas Discretas            Especialidad: Ing. En Sistemas Computacionales

Unidad VI.        Grafos

Objetivo:        aplicar los conceptos básicos de grafos para resolver problemas afines al área computacional, relacionados con el recorrido, búsqueda y ordenamiento de grafos, árboles y redes.